Propriétés des fonctions holomorphes

Exercice 1
Montrer qu'il n'existe aucune fonction h holomorphe sur le disque unité D de $\mathbb{C}$ et telle que

$$\lim_{|z|\to 1} |h(z)| = +\infty.$$

Indication : en raisonnant par l'absurde, on se ramènera au cas d'une fonction ne s'annulant pas sur D puis on utilisera le principe du maximum.

Solution.
Soit h une telle fonction.
Cas 1 : Si elle ne s'annule pas, alors

$$\frac{1}{|h|} \underset{|z|\to 1}{\longrightarrow} 0$$

ce qui contredit le principe du maximum.
Cas 2 : Si h s'annule, comme $\bar{D}$ est compact, c'est en un nombre fini de fois car sinon il existerait par Bolzano-Weirstrass une suite de zéros de h convergente dans le disque unité ce qui contredirait le principe des zéros isolés.
Soit $(z_1, ..., z_n)$ les zéros de h et α_i les multiplicités respectives.
On pose :

$$g := \frac{h}{\prod_{i=1}^{n}(z - z_i)\alpha_i}$$

g est holomorphe sur D et ne s'annule pas, de plus $\lim_{|z|\to 1} g(z) = +\infty$ et on se reporte alors au cas 1.

Exercice 2
Soit h une fonction holomorphe sur un disque D_r centré à l'origine et de rayon $r > 1$. On suppose que si z, $2z$ et $z + \frac{1}{2}$ sont dans D_r alors

$$2h(2z) = h(z) + h\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

1. Montrer que si z, $2z$ et $z + \frac{1}{2}$ sont dans D_r alors

$$4h'(2z) = h'(z) + h'\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

2. Soit $1 < \rho < r$. Montrer que $4|h'(z)| \leq 2\sup_{|z|\leq\rho} |h'(z)|$ si $|z| < \rho$ et en déduire que h est constante sur D_r.

Solution.
Q.1 : Soient z, $2z$ et $z + \frac{1}{2}$ dans D_r, alors on a :

$$2h(2z) = h(z) + h\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

et donc en dérivant :

$$4h'(2z) = h'(z) + h'\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

Q.2 : Si l'inégalité est vraie pour $1 < \rho < r$ alors on peut passer au sup et :

$$4 \sup_{|z|\leqslant\rho} |h'(z)| \leqslant 2 \sup_{|z|\leqslant\rho} |h'(z)| \leqslant$$

Montrant que $h'(z) = 0$ sur $D(0,\rho)$ et donc h est constante.

Exercice 3

Le but de cet exercice est d'établir la formule

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-k)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on pose $S_N(z) = \sum_{k=-N}^{+N} \frac{1}{(z-k)^2}$.

1. Montrer que l'on définit une fonction S holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ en posant $S(z) := \lim_{N\to\infty} S_N(z)$.
2. Montrer que la fonction f définie par $f(z) := S(z) - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{C}$.
3. Pour $y > 0$, soit $K_y := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1 \text{ et } \mathrm{Im}(z) \in \{-y, y\}\}$. Montrer que $\lim_{y\to+\infty} \sup_{z\in K_y} |f(z)| = 0$ puis conclure. Indication : on utilisera la périodicité de f puis le théorème de Liouville.
4. Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
5. On pose $G(z) := \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{z+j}\right)$. Montrer que $G'(z) = \pi(\cot(\pi z))'$ et en déduire que $G(z) = \pi \cot(\pi z)$.

Solution.

Q.1 : Les fonctions S_N sont holomorphes sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, il suffit alors de montrer que (S_N) converge uniformément localement vers S.
Pour cela, on pose $B_{k_0} := \{z \in \mathbb{C},\ -k_0 - \frac{1}{2} < \Re(z) < k_0 + \frac{1}{2}\} \in \mathbb{C}$ pour $k_0 \in \mathbb{N}$ de sorte que pour tout $z \in B_{k_0}$ et pour tout $k > k_0$:

$$|z-k| \geq ||z| - |k|| \geq |z| - |k| \geq \Re(z) - |k| \geq -k_0 - \frac{1}{2} + k =: \delta_0$$

C'est-à-dire que tout $z \in B_{k_0}$ est à distance au moins égale à δ_0 de tout entier $k > k_0$.
Soit $N > k_0$, on a :

$$S_N(z) = \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{(z-k)^2} = \sum_{k=-k_0}^{k_0} \frac{1}{(z-k)^2} + \sum_{k=-k_0-1}^{-N} \frac{1}{(z-k)^2} + \sum_{k=k_0+1}^{N} \frac{1}{(z-k)^2}$$

On pose $R_N(z) := \sum_{k=-k_0-1}^{-N} \frac{1}{(z-k)^2} + \sum_{k=k_0+1}^{N} \frac{1}{(z-k)^2}$ le reste d'ordre N.
Montrons alors que R_N converge uniformément vers 0 sur tout compact.
Soit $K_0 \subset B_{k_0}$ un compact et $z_0 \in K_0$. Pour $k > k_0$ on a :

$$|\frac{1}{(z-k)^2}| \leq \frac{1}{(k-k_0-\frac{1}{2})^2}$$

Donc :

$$R_N(z) = \sum_{|k|=k_0+1}^{N} \frac{1}{(z-k)^2} \;\leq \sum_{|k|=k_0+1}^{N} \frac{1}{(k-k_0-\frac{1}{2})^2} \;\leq \sum_{|k|=k_0+1}^{N} \frac{1}{k^2}$$

Qui assure la convergence uniforme de R_N vers 0.
Donc, pour tout compact de B_{k_0}, S_N converge uniformément, comme les B_{k_0} couvrent $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, la convergence locale uniforme de S_N est établie.

Q.2 : La fonction $z \mapsto \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ puisque $z \mapsto \sin^2(\pi z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et s'annule sur $\mathbb{Z}$. Ainsi, f est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Pour montrer que f peut se prolonger holomorphiquement à $\mathbb{C}$, il suffit de montrer que f est continue sur $\mathbb{C}$ puis de conclure par le phénomène d'extension.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \mathbb{C}$ différent de n.
D'une part :

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(n+\omega))} = \frac{\pi^2}{((-1)^n \sin(\pi\omega)))^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\omega))} \simeq_{\omega\to 0} \frac{\pi^2}{\pi^2\omega^2} = \frac{1}{\omega^2}$$

D'autre part :

$$S(n+\omega) = \frac{1}{\omega^2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{+\infty} \frac{1}{(n+\omega-k)^2}$$

Et donc :

$$f(n+\omega) \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)^2} \in \mathbb{C}$$

Qui permet de conclure.
Remarque : par changement d'indice puis par symétrie on trouve que :

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{+\infty} \frac{1}{(z-k)^2} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

Mais cela demande de connaitre le résultat de la question 4.

Q.3 : On va montrer que pour $z = x+iy \in K_y$, $|f(z)| \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Pour cela, évaluons dans un premier temps $S(x+iy)$ avec $x \in [0,1]$ et y fixé. Comme $|x+iy-k|^2 \leq (x-k)^2 + y^2$, on a :

$$\begin{aligned}
|S(x+iy)| &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-k)^2+y^2} \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1-k)^2+y^2} \\
&= \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{(1-k)^2+y^2} + \sum_{|k|>N} \frac{1}{(1-k)^2+y^2}
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\sum_{|k|>N} \frac{1}{(1-k)^2+y^2} \leq \sum_{|k|>N} \frac{1}{(1-k)^2} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Et : $\displaystyle\lim_{y\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{(1-k)^2+y^2} = 0$

C'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$ *et pour tout* $A > 0$*, il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $y > A \Rightarrow S(x+iy) \leq \varepsilon$*. Donc* $\displaystyle\lim_{y\to\infty} S(x+iy) = 0$.

Puis, évaluons $h(z) := \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$*. Pour cela, il suffit de regarder* $|\sin^2(z)|$ *pour* $z = x+iy \in K_y$.

$$\begin{aligned} 2|\sin(x+iy)| &= |e^{ix-y} - e^{-ix+y}| \\ &= |e^{-ix+y}(e^{i2x-2y} - 1)| \\ &\leq e^y(e^{-2y}+1) \\ &\geq e^y(1-e^{-2y}) \underset{z\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{aligned}$$

Donc $h(x+iy) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *et donc au final on a bien que :* $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \sup_{z\in K_y} |f(z)| = 0$.

Enfin, la 1-périodicité de f *permet d'étendre* K_y*. On considère alors*

$$\tilde{K}_y := \{z \in \mathbb{C}\ ,\ \Im(z) = \pm y\}$$

De deux choses l'une : si $\Im(z) \geq y$ *alors on a vu que* $|f(z)| \leq \varepsilon$ *pour un certain* $\varepsilon > 0$*. Puis, si* $\Im(z) < y$ *alors* f *étant continue sur* $\mathbb{C}$ *on peut la majorer par son sup sur le compact* $B := \{z = x+iy \in \mathbb{C}\ ,\ (x,y) \in [0,1]\times[-y,y]\}$ *puis étendre ce sup par 1-périodicité.*

Au final, f *est bornée sur* $\mathbb{C}$*. Par le théorème de Liouville, elle est constante. Or, comme elle tends vers 0 sur* K_y*, on en conclu qu'elle est nulle.*

Q.4 : D'une part on a :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-k)^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{(z-k)^2} = \frac{1}{z^2} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Et d'autre part, pour $z \to 0$, $\sin(\pi z) = \pi z - \frac{(\pi z)^3}{6} + o(z^4)$*, donc :*

$$\sin^2(\pi z) = \left(\pi z - \frac{\pi^3 z^3}{6} + o(z^4)\right)^2 = \pi^2 z^2 - \frac{\pi^4 z^4}{3} + o(z^5)$$

Posons $u = \frac{\pi^2 z^2}{3}$*. Alors :*

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} &= \frac{1}{z^2\left(1-u+o(z^2)\right)} \\ &= \frac{1}{z^2}(1+u+u^2+o(u^2)) \\ &= \frac{1}{z^2}\left(1+\frac{\pi^2 z^2}{3}+\frac{\pi^4 z^4}{9}+o(z^4)\right) \\ &= \frac{1}{z^2}+\frac{1}{3}+\frac{\pi^2 z^2}{9}+o(z^2) = \frac{1}{z^2}+\frac{\pi^2}{3}+\mathcal{O}(z^2) \end{aligned}$$

Finalement, $2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{3}$*, d'où le résultat.*

Q.5 : Posons $u_j(z):=\frac{1}{z-j}+\frac{1}{z+j}=\frac{2z}{(z-j)(z+j)}$ *pour* j *entier.*
Soit $R>0$*, si* $j>R$ *alors* u_j *est holomorphe sur* $D(0,R)$ *et l'on a :*

$$\sup_{D(0,R)}|u_j(z)|\leq\frac{2R}{(j-R)^2}\quad(*)$$

car si $|z|<R$ *alors* $|z\pm j|\geq j-R$ *par l'inégalité triangulaire renversée.*
Posons $G_N(z)=\frac{1}{Z}+\sum_{j=1}^{N}u_j(z)$ *la somme partielle et* $R_N=\frac{1}{Z}+\sum_{j\geq N}u_j(z)$ *son reste.*
Alors par $(*)$*, on a que* R_N *converge uniformément vers 0 sur tout disque. Donc, comme* $\sum_{1\leq j<R}u_j(z)$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$*,* $G(z)$ *est aussi holomorphe sur* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$*.*
La convergence locale uniforme nous donne aussi que pour $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ *:*

$$(G_N)'\xrightarrow{u,\ loc}G'$$

et donc :

$$G'(z)=\frac{-1}{z^2}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{(z-j)^2}+\frac{-1}{(z+j)^2}\right)=-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-k)^2}=-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$$

Or, $\cot(\pi z)=\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ *donc :*

$$\cot(\pi z)'=\frac{-\pi\sin^2(\pi z)+\pi\cos^2(\pi z)}{\sin^2(\pi z)}=-\frac{-\pi}{\sin^2(\pi z)}$$

Puis, par connexité de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ *:* $G(z)-\pi\cot(\pi z)=c\in\mathbb{C}$*.*
Reste à montrer que $c=0$*, or :* $\pi\cot(\frac{1}{2}\pi)=0$ *et :*

$$\begin{aligned}G(\frac{1}{2})&=2+\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}-j}+\frac{1}{\frac{1}{2}+j}\right)\\&=2-2\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1-2j}-\frac{1}{1+2j}\right)\\&=2-2=0\end{aligned}$$